Iteratives Glätten
von
B–Spline Kurven und B–Spline Flächen

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.–Math. Jan Hadenfeld
aus Hamburg

Referent:	Prof. Dr. J. Hoschek (Darmstadt)
Korreferent:	Prof. Dr. H. Nowacki (Berlin)
Tag der Einreichung:	20. April 1998
Tag der mündlichen Prüfung	19. Juni 1998

Darmstadt 1998
D 17

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **i**

Einleitung **1**

1 Grundlagen **7**

1.1 B–Spline Funktionen 7

1.2 B–Spline Kurven 8

1.3 B–Spline Flächen 8

2 Kurvenglättung **9**

2.1 Bekannte Verfahren 9

2.2 Glättung durch Energieminimierung 13

2.2.1 Problemstellung 16

2.2.2 Iterative Lösung 19

2.2.3 Berechnung des Kontrollpunktes 19

2.2.4 Die Abstandstoleranz 22

2.2.5 Die Rangnummer 24

2.2.6 Der Algorithmus 25

2.2.7 Beispiele 26

2.3 Ausdehnung auf Kurvenverbände 36

2.4 Datenabhängige Funktionale 43
2.5 Rationale Kurven 45
2.5.1 Beispiele 47

3 Flächenglättung **49**
3.1 Bekannte Verfahren 49
3.2 Glättung durch Energieminimierung 50
3.2.1 Problemstellung 52
3.2.2 Iterative Lösung 53
3.2.3 Beispiele 55
3.3 Ausdehnung auf Flächenverbände 58
3.3.1 Beispiel 60
3.4 Trimmkurven 62

4 Datenreduktion **67**
4.1 Einfügen eines Knotens 68
4.1.1 Offene B–Spline Kurven 68
4.1.2 Geschlossene B–Spline Kurven 69
4.2 Entfernen eines Knotens 72
4.2.1 Eine Strategie zum Entfernen von Knoten 73
4.3 Datenreduktion bei B–Spline Kurven und B–Spline Flächen . 75
4.3.1 Beispiele 78

Literaturverzeichnis **83**

Einleitung

Um ein kleines Bauteil oder einen komplexen Gegenstand wie ein Auto zu konstruieren, wird heutzutage häufig ein CAD-System benutzt. Auch wenn es eine Vielfalt an **C**omputer **A**ided **D**esign-Systemen gibt (siehe z.B. (Hoschek, 1993)), so wird zur Kurven- und Flächendarstellung meistens die Bézier- oder B–Spline-Darstellung verwendet, da es für diese Repräsentation einfache und stabile Algorithmen gibt. Auch werden durch die Kontrollpunkte die Gestalt der Kurve oder Fläche beschrieben und sind für den Konstrukteur für interaktive Veränderungen einfach handhabbar.

Für die Erzeugung von Kurven oder Flächen sind folgende Vorgehensweisen die Regel: Approximation von gegebenen Punktmengen sowie direkte Freihand-Konstruktion. Punktmengen entstehen dadurch, daß, nachdem ein Prototyp aus Ton erzeugt wurde, dieser taktil abgetastet oder optisch mit Hilfe eines Laserverfahrens vermessen wird. Eine weitere Möglichkeit mittels digitaler Photogrammetrie wird in (Bonitz und Krzystek, 1996) beschrieben. Im Schiffbau erhält man diskrete Punkte nach einem Vorentwurf, die Wasserlinien, Spanten und Längsschnitte beschreiben (Lü, 1994; Nowacki et al., 1995).

Je nach Auflösung der Abtastung entsteht dadurch ein mehr oder weniger großes Datenvolumen an Punkten. Durch eine rauhe Oberfläche, die Meßgenauigkeit des Abtasters oder andere äußere Einflüsse können diese Punkte jedoch mit Meßfehlern behaftet sein.

Ziel ist es, möglichst *glatte* Kurven oder Flächen durch diese Punktmengen zu legen sowie dabei eine vorgegebene Abstandstoleranz einzuhalten. Bei einer Freihand-Konstruktion ist es schwer, die Kurven oder Flächen so zu er-

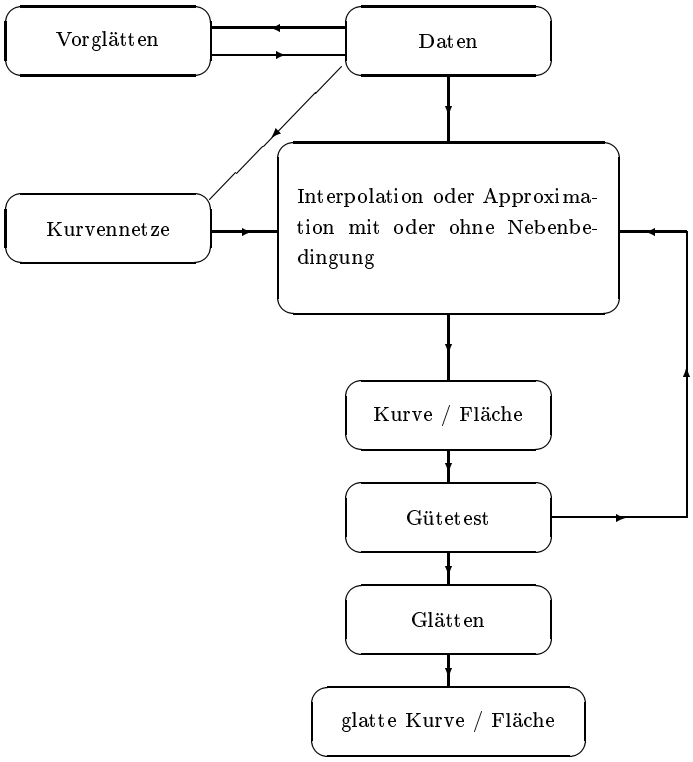

Abbildung 1: Stufen der Generierung von Kurven und Flächen.

zeugen, daß sie glatt sind. Hier ist dann unter Umständen eine *nachträgliche* Bearbeitung notwendig.

Aus diesen Anwendungen heraus können folgende Stufen (Abbildung 1) der Generierung von Kurven und Flächen beschrieben werden (s. a. (Hoschek und Lasser, 1992)): Die gegebenen Daten werden vorgeglättet (z.B. (Eck und Jaspert, 1994)) und dann mit Kurven oder Flächen interpoliert oder approximiert (z.B. (Brunnett et al., 1993; Dietz, 1996; Eck und Hoppe, 1996; Hoschek und Dietz, 1996)). Als Nebenbedingung kann dabei ein *geeignetes* Glättekriterium eingehen. In manchen CAD-Systemen erfolgt bei der Erzeugung von Flächen noch als Zwischenschritt die Generierung eines Kurvennetzes (Rybak, 1996). Auch in (Lü, 1994) werden glatte Flächen über einem Kurvennetz erzeugt (Nowacki und Lü, 1994).

Wenn nach einem Gütetest die Kurven oder Flächen noch nicht *glatt* sind, kann die Interpolation oder Approximation mit veränderten Parametern neu berechnet werden oder — und damit wird sich diese Arbeit beschäftigen — es wird eine nachträgliche Glättung benutzt.

Als Gütetest wird bei Kurven häufig die Krümmung und bei Flächen die Reflektionslinien (Kaufmann und Klass, 1988; Klass, 1980) oder Isophoten (Poeschl, 1984) benutzt. Je nach gewünschter Eigenschaft der Kurven wird auch die Torsion oder bei Flächen die mittlere oder Gaußsche Krümmung benutzt (s. a. (Hagen et al., 1992)). Eine weitere Möglichkeit, um unerwünschte bzw. unglatte Bereiche zu erkennen, sind die aus der Optik bekannten *k-orthotomics* (Hoschek, 1984, 1985). Für Flächen werden in (Kåsa und Westgaard, 1996) weitere Analysemöglichkeiten beschrieben.

Dem Begriff der *Glätte* liegt im **C**omputer **A**ided **G**eometric **D**esign (CAGD) keine einheitliche Definition zugrunde. In der Praxis kann eine Kurve glatt sein, wenn sie einen gleichmäßigen Verlauf der Krümmung oder möglichst wenig Wendepunkte hat. Bei der Oberfläche eines Autos z.B. dürfen keine Dellen vorhanden sein, und die Reflektionslinien sollen einen gleichmäßigen Verlauf haben (siehe Abbildung 2).

Abbildung 2: Reflektionslinien eines Autos im Lichtkäfig

Auch im Schiffbau ist die Konstruktion glatter Kurven und Flächen wichtig; in den Arbeiten (Theilheimer und Starkweather, 1961), (Nowacki und Reese, 1983; Nowacki et al., 1983), (Lott und Pullin, 1988), (Nowacki, 1990), (Pigounakis et al., 1996) und (Ives-Smith, 1996; Ives-Smith und Applegarth, 1997) sind dazu Beispiele angegeben.

Weit verbreitet hat sich, eine Kurve oder Fläche als glatt zu bezeichnen, wenn sie gewisse Energien bzw. Modelle von Biegeenergien minimiert. Diese Verfahren haben ihren Ursprung in einem mechanischem Glättungsprozess, bei dem eine *Straklatte* durch Gewichte festgehalten wird, um am Zeichentisch glatte Kurven zu erhalten. Die Latte nimmt im Gleichgewichtszustand die geringste Formänderungsenergie an.

Die Glättung erfolgt bei Kurven und Flächen manchmal noch *per Hand*, d.h. es werden solange Kontrollpunkte manipuliert, bis das gewünschte Ergebnis vorliegt. Dies ist jedoch eine zeitraubende Arbeit. In der vorliegenden Arbeit werden Lösungen und Verfahren gezeigt, um *gegebene* B–Spline Kurven und B–Spline Flächen sowie Kurven- und Flächenverbände *automatisch* mit einem iterativen Verfahren zu glätten. Die Glättung beruht darauf, daß durch Variation der Kontrollpunkte ein in den Kontrollpunkten quadratisches Energiefunktional iterativ minimiert wird. Durch geeignete Vereinfachungen (Linearisierungen) können so in jedem Schritt explizite Lösungen angegeben werden, und es wird auf eine einfache Weise die Abstandstoleranz eingehalten. Weiter wird für Kurven ein Vergleich mit einer globalen Optimierung (Spellucci, 1996) gezeigt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Kapitel 1 gibt eine kurze Definition der B–Spline Kurven und B–Spline Flächen. Im Kapitel 2 wird auf die Glättung von Kurven und im Kapitel 3 auf die Glättung von Flächen eingegangen. Es wird jeweils nach einer Einleitung die allgemeine Problemstellung diskutiert und dann ein iteratives Lösungsverfahren vorgestellt. Hier werden die Ergebnisse durch einige Beispiele ergänzt, die zum Teil akademischer Art sind, zum Teil aber auch direkt aus der Anwendung im Automobil- und Schiffbau kommen. Da die Vorgehensweise bei Flächen ähnlich wie bei Kurven ist, wird das Kapitel über die Flächenglättung kürzer gehalten.

Im vierten Kapitel wird ein neues Verfahren zur Datenreduktion beschrieben. Die Methode aus (Hadenfeld, 1993), um einen Knoten einer B–Spline Kurve optimal zu entfernen, wurde erweitert (Eck und Hadenfeld, 1995a) und dazu benutzt, mit einer Strategie so viele Knoten einer B–Spline Kurve oder B–Spline Fläche optimal zu entfernen wie unter Einhaltung einer Abstandstoleranz möglich ist (Eck und Hadenfeld, 1994). Es werden zusätzlich Ergebnisse für geschlossene Kurven und Flächen gezeigt.

Um einen möglichst guten Überblick zum Thema Glätten zu bekommen, wird, so oft es geht, die bisher veröffentlichte Literatur genannt.

Die vorliegende Arbeit wurde zum Teil aus dem Forschungsprojekt *Glättung von Flächen* des Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Technologie (*BMBF*) gefördert.

Mein Dank gilt besonders Herrn Prof. Dr. J. Hoschek für die Betreuung meiner Promotion und Herrn Prof. Dr. H. Nowacki von der Technischen Universität Berlin für die Übernahme des Korreferates.